Sur les triangles inscrits dans une hyperbole équilatère

G.Huvent

Gery.Huvent@ac-lille.fr

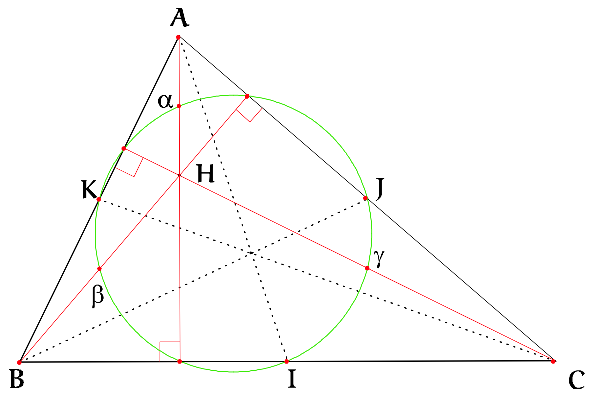
18 janvier 2000

Résumé

Lorsqu'un triangle ABC d'orthocentre H a ses sommets sur une hyperbole équilatère, cette dernière a son centre sur le cercle d'Euler du triangle et contient H.

Notations : AB désigne la droite passant par les points A et B. Lorsque D_1 et D_2 sont deux droites, on note $\widehat{D_1, D_2}$ l'angle qu'elle forment, il est défini à π près.

Rappel : On rappelle le résultat suivant :
Le cercle d'Euler contient les milieux I, J, K des cotés du triangle ainsi que les milieux α, β, γ des segments joignant un sommet à l'orthocentre.



1 Caractérisation angulaire de l'hyperbole équilatère

1.1 Une propriété des milieux des cordes

Proposition 1 *Soit $(\mathcal{H})$ une hyperbole équilatère alors toute corde AB de $(\mathcal{H})$ découpe sur les asymptotes un segment $[P, Q]$ qui a même milieu que $[A, B]$*

Preuve. *Dans le repère lié aux asymptotes l'équation de* $(\mathcal{H})$ *est* $xy = k$*, où* k *est un réel. Notons* a *et* b *les abscisses de* A *et* B*. L'équation de la corde* AB *est* $\begin{vmatrix} x-a & b-a \\ y-\frac{k}{a} & \frac{k}{b}-\frac{k}{a} \end{vmatrix} = 0$*, ce qui se simplifie en* $y = -\frac{k}{ab}(x-(a+b))$*.*

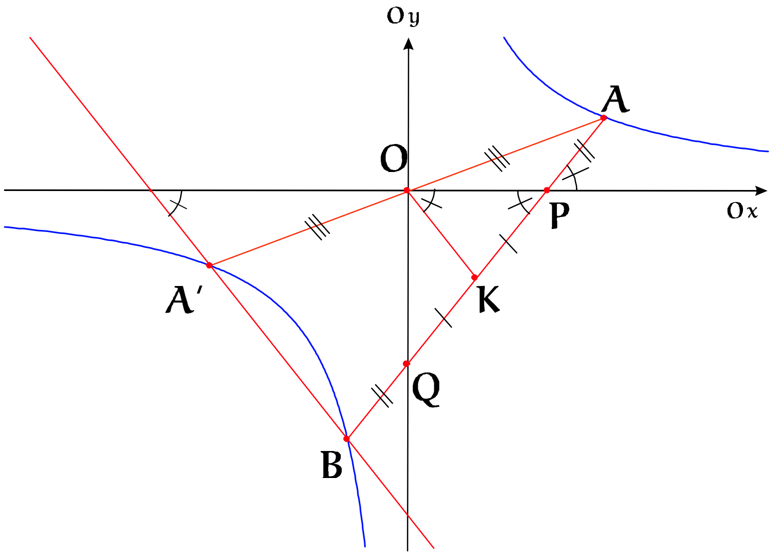
On en déduit les coordonnées de $P : (a+b, 0)$ *et* $Q : \left(0, \frac{k}{a}+\frac{k}{b}\right)$*.*

Le milieu de $[P, Q]$ *coïncide avec celui de* $[A, B]$*.* ■

Remarque 2 *Cette propriété est vraie pour toute hyperbole, équilatère ou pas.*

1.2 Caractérisation des cordes d'une hyperbole équilatère

A l'aide de ce résultat, on établit quelques propriétés angulaires des hyperboles équilatères.
On note A' le symétrique du point A par rapport à O, ainsi O est le milieu de $[A, A']$. On désigne par Ox et Oy les deux asymptotes



Le triangle KPO est isocèle (OK est la diagonale du rectangle de sommet O, P, Q), ainsi les angles aux sommets P et O sont les mêmes. Par la réciproque du théorème de Thalès (O milieu de $[A, A']$ et K milieu de $[A, B]$) les droites OK et $A'B$ sont parallèles.
On en déduit que

$$\widehat{Ox, AB} = \widehat{A'B, Ox}$$

En fait cette égalité caractérise les points de l'hyperbole différents de A et A'. Si M ($M \neq A$ et $M \neq A'$) est un point du plan tel que $\widehat{Ox, AM} = \widehat{A'M, Ox}$, la droite (AM) coupe l'hyperbole en deux points A et B (et $B \neq A'$). Le point B

vérifie aussi $\widehat{\mathsf{Ox},\mathsf{AB}} = \widehat{\mathsf{A'B},\mathsf{Ox}}$ et ainsi $\widehat{\mathsf{A'M},\mathsf{Ox}} = \widehat{\mathsf{A'B},\mathsf{Ox}}$ (car $\mathsf{AM} = \mathsf{AB}$). On en déduit que $\mathsf{A'M} = \mathsf{A'B}$ et $\mathsf{AM} = \mathsf{AB}$, d'où $\mathsf{M} = \mathsf{B}$.

Proposition 3 *Le point* M *est sur l'hyperbole de diamètre* $[\mathsf{A},\mathsf{A'}]$ *si et seulement si*

$$\widehat{\mathsf{Ox},\mathsf{AM}} = \widehat{\mathsf{A'M},\mathsf{Ox}}$$

Un corollaire qui nous sera utile est le suivant :

Corollaire 4 *L'hyperbole équilatère de diamètre* $[\mathsf{A},\mathsf{A'}]$ *passant par* B *est le lieu des points* C *tels que*

$$\widehat{\mathsf{AB},\mathsf{AC}} = \widehat{\mathsf{A'C},\mathsf{A'B}}$$

Preuve. C *est sur l'hyperbole si et seulement si* $\widehat{\mathsf{Ox},\mathsf{AC}} = \widehat{\mathsf{A'C},\mathsf{Ox}}$
On sait que B *est un point de l'hyperbole ainsi* $\widehat{\mathsf{AB},\mathsf{Ox}} = \widehat{\mathsf{Ox},\mathsf{A'B}}$ *(cf proposition 3). Ainsi* $\widehat{\mathsf{Ox},\mathsf{AC}} = \widehat{\mathsf{A'C},\mathsf{Ox}} \Leftrightarrow \widehat{\mathsf{AB},\mathsf{Ox}} + \widehat{\mathsf{Ox},\mathsf{AC}} = \widehat{\mathsf{A'C},\mathsf{Ox}} + \widehat{\mathsf{Ox},\mathsf{A'B}} \Leftrightarrow \widehat{\mathsf{AB},\mathsf{AC}} = \widehat{\mathsf{A'C},\mathsf{A'B}}$ ■

2 Sur L'orthocentre d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère

Considérons alors un triangle ABC inscrit dans une hyperbole équilatère. Notons H son orthocentre, alors $\widehat{\mathsf{HC},\mathsf{HB}} = \widehat{\mathsf{AB},\mathsf{AC}}$ (angles à cotés perpendiculaires). D'où $\widehat{\mathsf{HC},\mathsf{HB}} = \widehat{\mathsf{A'C},\mathsf{A'B}}$ (cf corollaire 4) et ainsi par le théorème de l'arc capable on obtient la

Proposition 5 *les quatre points* $\mathsf{H},\mathsf{C},\mathsf{B}$ *et* $\mathsf{A'}$ *sont cocycliques.*

On en déduit que $\widehat{\mathsf{A'H},\mathsf{A'B}} = \widehat{\mathsf{CH},\mathsf{CB}}$, mais $\widehat{\mathsf{CH},\mathsf{CB}} = \widehat{\mathsf{AB},\mathsf{AH}}$ (angles à cotés perpendiculaires). En particulier $\widehat{\mathsf{AB},\mathsf{AH}} = \widehat{\mathsf{A'H},\mathsf{A'B}}$ et on a le

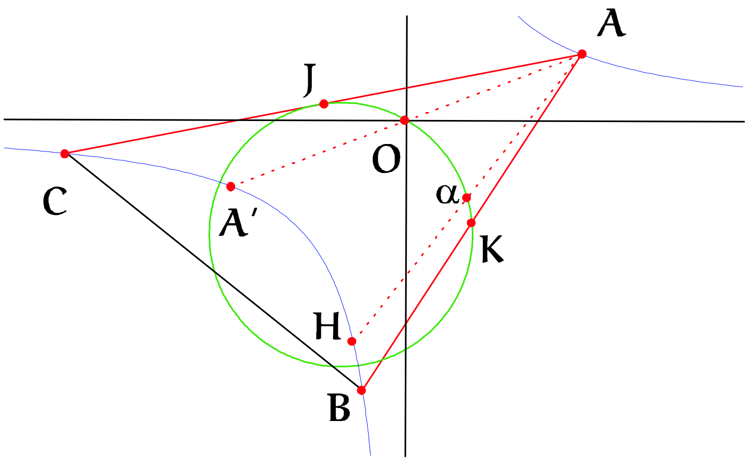
Théorème 6 *L'orthocentre de tout triangle inscrit dans une hyperbole équilatère est sur cet hyperbole*

2.1 Une propriété du cercle d'Euler

On peut maintenant prouver le théorème qui nous intéresse et qui, je crois, est de Brianchon et Poncelet.

Théorème 7 *Le centre de toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle est sur le cercle d'Euler de ce triangle*

Preuve.



homothétie de centre A *et de rapport* $\frac{1}{2}$ *envoie* B *sur* K *milieu de* $[A, B]$, C *sur* J *milieu de* $[A, C]$*,* H *sur* α *milieu de* $[A, H]$ *et* A' *sur* O*. On sait que* B, C, H *et* H' *sont cocycliques et que les trois points* J, K *et* α *sont sur le cercle d'Euler de* ABC*, il en est donc de même de* O ■

2.2 Remarques

On a vu que les points H, B, C et A' sont cocycliques. Ils sont situés sur le cercle image du cercle d'Euler du triangle ABC par l'homothétie de centre A et de rapport 2. En fait ce cercle est l'image du cercle circonscrit au triangle ABC par la symétrie orthogonale par rapport à la droite BC.

En particulier le symétrique de A' par rapport à BC est sur le cercle circonscrit au triangle ABC (résultat que l'on retrouve par l'égalité $\widehat{AB, AC} = \widehat{A'C, A'B}$ cf corollaire 4.

2.3 Une parabole pour finir en beauté

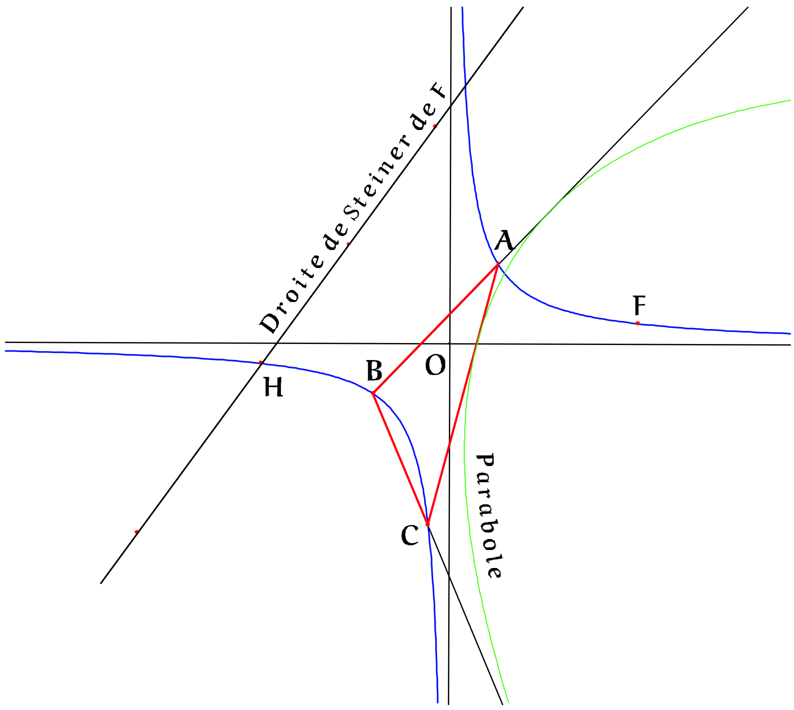
Il existe un autre point sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Proposition 8 *Soit* ABC *un triangle d'orthocentre* H *et inscrit dans une hyperbole équilatère de centre* O*.*
Le point F *symétrique de* H *par rapport à* O *est sur le cercle circonscrit au triangle* ABC

Preuve. B *est sur l'hyperbole équilatère de diamètre* $[FH]$ *passant par* A*, on a (cf corollaire 4)* $\widehat{HA, HB} = \widehat{FB, FA}$ *. Mais* $\widehat{HA, HB} = \widehat{CA, CB}$ *(angles à côtés perpendiculaires), ainsi par le théorème de l'arc capable, les points* A, B, C *et* F *sont cocycliques.* ■

Le point F est donc sur le cercle circonscrit à ABC, si F est distinct de A, B et C alors la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$, droite de Steiner de F, est

"tritangente" au triangle ABC.
(pour ce résultat voir :
http ://www.cabri.net/abracadabri/GeoPlane/Cocyclik/SimpSte2.htm)



Reste le cas où F est en A, B ou C. Que dire alors du triangle ABC ?

Remarque 9 *Un problème réciproque est posé dans le Bulletin n°425 (Novembre-Décembre 1999) de l'APMEP, dans la rubrique : "Les problèmes de l'APMEP"*

Références

[1] C.Lebossé & C.Hémery. *Géométrie classe de Mathématiques*. Editions Jacques Gabay