

Cabri-intégration des équations différentielles

D. TOURNES
IUFM - La Réunion

Cabri peut-il intégrer les équations différentielles ? Cela dépend dans une large mesure du sens donné au mot *intégration*, sens qui a d'ailleurs régulièrement évolué depuis trois siècles. Les premières tentatives pour exprimer algébriquement les solutions en termes finis à l'aide des fonctions usuelles tournèrent vite court, et il fallut dès la fin du 17^e siècle autoriser une nouvelle opération, la primitivation, pour obtenir ce qui est appelé depuis *intégration par quadratures*. Hélas, en 1840, Liouville montra que de larges classes d'équations différentielles, dont certaines parmi les plus simples, telles les équations de Riccati, ne sont pas intégrables par quadratures ⁽¹⁾. Il ne restait plus qu'à tenter d'exprimer les solutions par des algorithmes infinis (séries, fractions continues, limites de solutions d'équations aux différences finies ...). Dans la pratique, ces algorithmes *infinis* d'intégration *exacte* doivent naturellement être tronqués pour permettre un calcul effectif en un temps raisonnable, et donnent naissance à des algorithmes *finis* d'intégration *approchée*. La résolution et la présentation des résultats peuvent se faire sous forme numérique ou graphique. De ce point de vue, Cabri a sans doute vocation, au moins dans certains cas, à servir d'*intégrateur graphique*.

Des équations différentielles au lycée ?

Je tiens tout d'abord à préciser dans quel esprit j'entreprends une exploration des équations différentielles avec Cabri. Les équations différentielles sont étudiées en Terminale, plus précisément les équations linéaires du premier et du second ordre à coefficients constants, en lien avec les phénomènes continus d'évolution rencontrés dans les autres disciplines (sciences physiques, biologie, économie...). Cette partie du programme est souvent négligée : traitée en fin d'année par le professeur de mathématiques alors que le collègue de physique s'en sert depuis le début, elle fait l'objet au baccalauréat de rares exercices d'un intérêt limité. Je crois pourtant qu'il est possible de proposer aux lycéens des activités numériques et graphiques motivantes permettant d'acquérir de bonnes images mentales tout en se préparant à franchir le saut conceptuel qui sépare une équation numérique d'une équation fonctionnelle. Cabri peut ici être utile. Je vais donc m'efforcer de proposer des constructions accessibles à un élève de Terminale, réalisables en club informatique.

Entrons dans le vif du sujet. Nous nous intéressons au problème de Cauchy pour l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ et la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Lorsque la fonction f est de classe C^1 , on sait que ce problème admet une unique solution maximale. Pour travailler avec Cabri, nous supposons de plus que la fonction f est *constructible à la règle et au compas*. Cela signifie concrètement que, quatre points d'abscisses 0, 1, x et y étant donnés sur un axe, le point d'abscisse $f(x, y)$ peut être obtenu en utilisant un nombre fini de fois les macros ⁽²⁾ $a + b$, $a - b$, $a \times b$, a/b et \sqrt{a} .

La méthode d'Euler-Cauchy

Cet article est consacré à la méthode d'intégration approchée la plus simple : la *méthode d'Euler-Cauchy*. Pour calculer la valeur de $y(x)$, on partage l'intervalle $[x_0, x]$ en n parties égales et on remplace, successivement sur chaque intervalle de la subdivision, l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ par l'équation aux différences finies $\Delta y = f(x, y) \Delta x$.

En posant $h = (x - x_0)/n$, cela revient à calculer de proche en proche :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h f(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + h f(x_1, y_1) \\ &\dots \\ y_n &= y_{n-1} + h f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

et à prendre à la fin $y_n(x) = y_n$ comme valeur approchée de $y(x)$. En gros, sur chaque intervalle, on remplace la courbe intégrale par sa tangente. Cette méthode fut exposée par Euler en 1768, et utilisée par Cauchy en 1824 pour démontrer le théorème fondamental d'existence appelé aujourd'hui *théorème de Cauchy-Lipschitz*.

Faisons un premier essai avec une équation-test très simple que l'on sait intégrer exactement : $y' = -y$. La solution telle que $y(0) = 1$ est $y = e^{-x}$. Choisissons deux points de base O et I (permettant de fixer l'unité de longueur et le repère) et un point M quelconque, de coordonnées (x_M, y_M) . La tangente à la courbe intégrale passant par M a pour pente $-y_M$. C'est la parallèle passant par M à la droite (Iy_M) ⁽³⁾. Pour la suite, le segment de cette tangente qui joint M au point d'abscisse x sera très utile. Enregistrons une macro *Segment_y'=-y* renvoyant ce segment à partir des objets initiaux O, I, M et x.

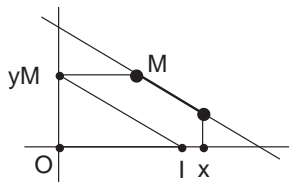
(1) Voir abraCAdaBRI n°4.

(2) Pour la somme ou la différence, on peut exploiter la macro Translaté exposée dans abraCAdaBRI n°0, p. 15. Le produit et le quotient se trouvent dans abraCAdaBRI n°1, p. 18. Quant à la racine carrée, voir abraCAdaBRI n°2, p. 17.

(3) Nous identifierons souvent un point de l'axe des abscisses avec son abscisse, et un point de l'axe des ordonnées avec son ordonnée.

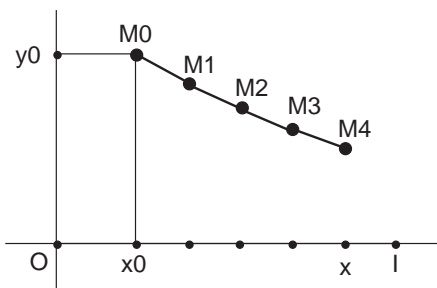
Note de la rédaction

Etant donné que l'on devra appliquer plusieurs fois cette macro, il est préférable d'éviter de reconstruire autant de fois la droite (OI). Il est donc conseillé de définir O et I comme points sur objet d'une droite de base Δ. La macro est alors définie à partir des objets initiaux Δ, O, I, M et x. Cette remarque s'applique aussi à la macro

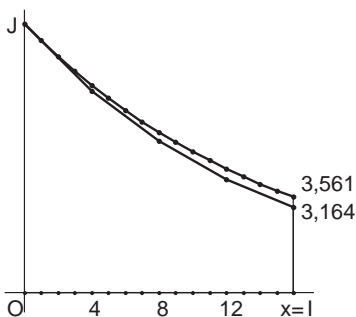


Quand on travaille à la règle et au compas, il est pratique de prendre pour n une puissance de 2. Préparons des macros *Partage4*, *Partage8* et *Partage16* pour partager un segment en 4, 8 ou 16 parties égales. À partir d'un point initial M_0 , on peut désormais construire à l'aide de *Partage_en_4* et de *Segment_y'=-y* la ligne polygonale $M_0M_1M_2M_3M_4$ approchant la courbe intégrale passant par M_0 sur le segment $[x_0, x]$. Enregistrons une dernière macro *Euler4_y'=-y* renvoyant cette ligne polygonale à partir des objets initiaux O, I, M_0 et x . Il ne semble pas possible de faire une macro pour un partage en 8, car comportant trop d'objets, mais c'est un ignorant qui parle : à vous de jouer ! Ce n'est en fait pas bien grave : il suffira d'utiliser 2 ou 4 fois la macro *Euler4_y'=-y* pour réaliser des lignes polygonales à 8 ou 16 côtés.

(4) Augustin-Louis Cauchy, Équations différentielles ordinaires, Éditions Études Vivantes, Paris, 1981.



Pour tester la précision de cette méthode d'intégration approchée, calculons $e^{-1} = 0,367...$ avec des partages en 4 et 16 intervalles. Prenons pour unité $OI = 10$ cm, construisons le point J de l'axe des ordonnées tel que $OJ = OI$, et faisons afficher la valeur approchée de e^{-1} obtenue dans les deux cas pour $x = I$.



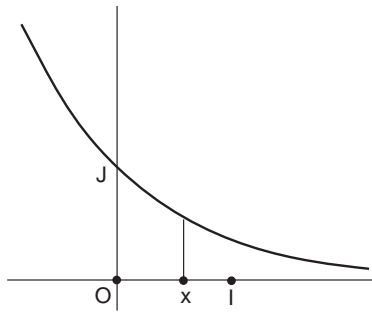
Reproduction à l'échelle pour une unité de 10 cm

On voit que le partage en 16 suffit pour obtenir une précision (de l'ordre de 10^{-2}) permettant de tracer de manière réaliste des courbes intégrales.

Observons également que la construction de la ligne polygonale à la règle et au compas avec Cabri est exacte (tout au moins en théorie) et donc que la valeur approchée finale est seulement entachée d'une *erreur de méthode*. C'est là un avantage indéniable par rapport à une approche numérique, dans laquelle s'ajoute à l'erreur de méthode une *erreur de calcul* provenant de l'accumulation des erreurs d'arrondi des n calculs intermédiaires. Tant qu'on travaille avec une fonction f constructible à la règle et au compas, on peut dire que Cabri est un intégrateur approché *exact* !

Une courbe approchée régulière

Mais il y a mieux. Pour approcher une courbe intégrale sur tout un intervalle $[x_0, x_1]$, la plupart des traités actuels proposent de construire la ligne polygonale issue d'un partage de l'intervalle $[x_0, x_1]$ en n parties égales et obtiennent ainsi une *fonction continue affine par morceaux*, utilisée ensuite pour approcher la solution en tout point x de l'intervalle. Ce n'est pourtant pas du tout cette idée que Cauchy avait à l'esprit en 1824, si on lit attentivement son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (4). Pour Cauchy, la construction précédente ne doit pas seulement être effectuée pour l'extrémité x_1 , mais bien *en chaque point x*. La courbe intégrale approchée n'est plus alors une simple ligne polygonale de classe C^1 par morceaux, mais une *courbe parfaitement régulière*, de même classe que f (de classe C^∞ sur notre exemple-test). On conçoit que, par souci pratique d'économie, on se contente d'habitude d'un seul calcul numérique ou d'une seule construction graphique. Avec Cabri, cette limitation n'a plus de sens. Prenons x , point sur objet de l'axe des abscisses, et construisons comme ci-dessus la ligne polygonale issue de J pour un partage en 16 de l'intervalle $[0, x]$. Effaçons la ligne polygonale à l'exception de son extrémité : il nous reste le point générique de la courbe intégrale approchée issue de J. Demandons le lieu de ce dernier point lorsque x décrit l'axe des abscisses. Nous obtenons la courbe intégrale approchée imaginée par Cauchy, qui donne une excellente image de la fonction $x \rightarrow e^{-x}$.

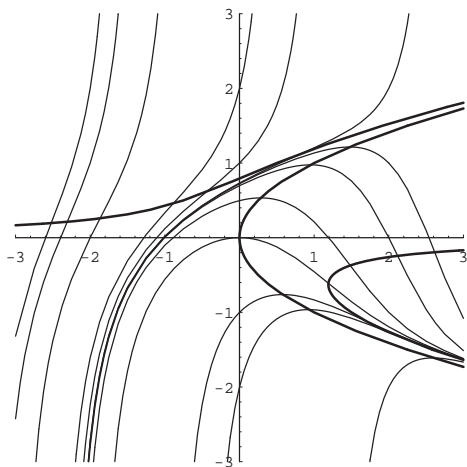


N'ayons pas peur des mots : *Cabri* permet de retrouver la vérité historique de la méthode d'Euler-Cauchy.

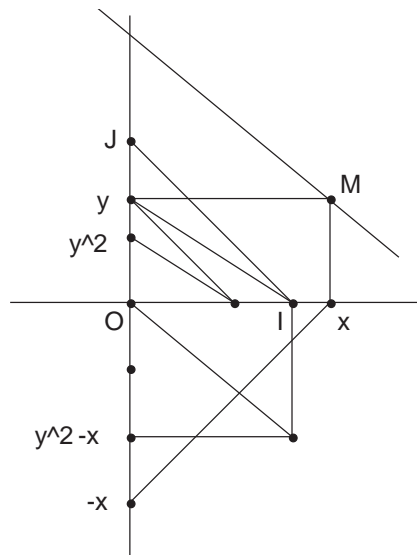
Revoilà l'équation de Riccati

La méthode d'Euler-Cauchy n'ayant plus de secret pour nous, il est temps de reprendre l'exploration de la fameuse équation de Riccati $y' = y^2 - x$, équation non intégrable par quadratures.

Voici les courbes intégrales fournies par Mathematica. (5)



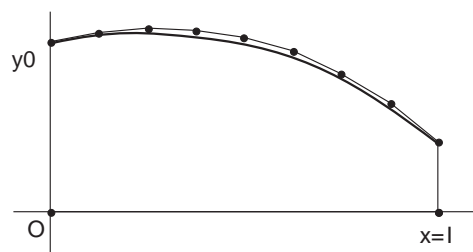
Le premier travail est de construire, pour un point M quelconque, de coordonnées (x, y) , la droite passant par M et de pente $y^2 - x$. Pour ceux qui n'ont pas encore étudié les macros algébriques de base, nous donnons ci-dessous une construction complète qui ne devrait pas être trop difficile à comprendre.



(5) Suite à un incident technique, ces courbes n'ont pas été imprimées dans l'article du numéro 4.

Préparons ensuite la construction du point générique de la courbe intégrale approchée qui passe par le point $(0, y_0)$, en nous contentant pour cette fois d'un partage en huit de l'intervalle $[0, x]$, largement suffisant pour une étude qualitative. Sur la figure suivante, nous avons tracé la ligne polygonale correspondant au cas particulier $x = I$ et la courbe régulière obtenue lorsque x décrit le segment $[OI]$. On comprend bien pourquoi la seconde est plus précise que la première : pour tous les points intermédiaires, le calcul a été réalisé avec une subdivision plus fine.

(6) Comparer avec le graphique Mathematica.



Il ne nous reste plus qu'à demander le tracé simultané des lieux de deux points génériques correspondant à deux valeurs bien choisies de y_0 , pour visualiser de manière somptueuse les deux types de courbes intégrales de cette équation de Riccati : celles qui sont croissantes avec asymptotes verticales à gauche et à droite, celles qui sont croissantes puis décroissantes avec asymptote verticale à gauche et parabole asymptote à droite (6). (Il est évident que la méthode n'est fiable que si on ne s'éloigne pas trop des points initiaux : si on construit ces lieux avec Cabri sur de trop grands intervalles, on peut observer quelques aberrations).