# Notes sur les points cycliques

G.Huvent
Gery.Huvent@mail.ac-lille.fr

7 avril 2000

# Notions élémentaires sur les points cycliques

On considère un plan affine réel $\Pi$ de direction l'espace vectoriel $E$. On suppose que ce plan et $E$ sont munis d'une structure euclidienne.

On peut alors complexifier $\Pi$ et $E$,rappelons rapidement comment.

## 0.1 Complexification

On note $E_c$ l'ensemble $E^2$ muni des lois suivantes :
$(X, Y) + (X', Y') = (X + X', Y + Y')$
$(a + ib) \times (X, Y) = (aX - bY, bX + aY)$
Ces deux lois confèrent à $E_c$ une structure de $\mathbb{C}$ espace vectoriel, structure qui prolonge celle de $E$ .
$E$ s'identifie à l'ensemble des vecteurs $(X, 0)$ (un tel vecteur est dit réel), on a alors $(X, Y) = (X, 0) + i(Y, 0)$ , ce qui justifie la notation

$$(X, Y) = X + iY$$

Le vecteur $X - iY$ est dit conjugué du vecteur $X + iY$.
Lorsque $E$ est de dimension finie, $E_c$ est aussi de dimension finie et de même dimension (le premier sur R, le second sur C ). Une base est dite réelle si tous les vecteurs qui la constituent le sont. Un vecteur est réel si ses coordonnées dans une base réelle le sont.

Toute forme bilinéaire sur $E$ se prolonge à $E_c$ par $\varphi(X + iY, X' + iY') = \varphi(X, X') - \varphi(Y, Y') + i[\varphi(Y, X') + \varphi(X, Y')]$. Ceci permet de prolonger le produit scalaire de $E$ (lorsque celui ci est muni d'une structure euclidienne).
En particulier le carré scalaire de $(X + iY)$ est $\|X\|^2 - \|Y\|^2 + 2iX \cdot Y$. On définit alors les repères orthonormé de féçon naturelle.

## 0.2 Vecteurs et droites isotropes

**Definition 1** *Un vecteur est dit isotrope su son carré scalaire est nul.*

Considérons un repère orthonormé réel $(O, i, j)$ . Le produit scalaire des vecteurs $\alpha i + \beta j$ et $\alpha' i + \beta' j$ est alors $\alpha\alpha' + \beta\beta'$. Un vecteur $\alpha i + \beta j$ est donc isotrope si $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. Ceci conduit à poser la définition suivante :

**Definition 2** *Une droite est dite isotrope si elle admet un vecteur directeur isotrope, i.e. si en repère orthonormé son coefficient directeur est* $\pm i$.

Ce qui est remarquable, c'est que cela ne dépend pas du repère orthonormé ! De plus **par un point $M$ donné il passe donc deux droites isotropes**.

On peut maintenant introduire la notion de points cycliques. On considère maintenant la complétion projective de $\Pi$ qui est aussi complexifié. Le choix d'un repère de $\Pi$ donne un système de coordonnées homogènes du complété projectif (si $\mathcal{R}$ est un tel repère, le point $M$ de $\Pi$ de coordonnées $(x, y)$ a pour coordonnées homogène $(x, y, 1)$, le point à l'infini de la droite de vecteur directeur $u = (x, y)$ a pour coordonnées homogène $(x, y, 0)$ On a alors la

**Definition 3** *Les points cycliques sont les points à l'infini des directions des deux droites isotropes.*

Les points cycliques $I$ et $J$ sont donc les deux points de la droite à l'infini qui admettent pour coordonnées homogènes les triplets $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$ ceci **pour tout choix du repère orthonormé de $\Pi$**.

## 0.3 Interprétation de l'orthogonalité

On choisit un repère orthonormé $(0, i, j)$ de $\Pi$.
Considérons deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non parallèles de $\Pi$ de vecteurs directeurs $u = \alpha i + \beta j$ et $u' = \alpha' i + \beta' j$. Soit $M$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et $\Delta, \Delta'$ les deux droites isotropes issues de $M$. Le birapport $\rho = (\mathcal{D}, \mathcal{D}', \Delta, \Delta')$ calculé en coupant par la droite à l'infini donne $\rho = \dfrac{\alpha\alpha' + \beta\beta' - i\left(\alpha\beta' - \beta\alpha'\right)}{\alpha\alpha' + \beta\beta' + i\left(\alpha\beta' - \beta\alpha'\right)}$. On a donc le résultat suivant

**Proposition 4** *Les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales si et seulement si elles sont conjugués harmoniques par rapport aux isotropes menée par leur point d'intersection.*

Considérons maintenant une conique $\mathcal{C}$ de $\Pi$, son équation homogénéisée est de la forme $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$ (avec $a \neq 0$ pour avoir une conique).
$\mathcal{C}$ passe par les points cycliques si et seulement si

$$\begin{aligned} a - b + di &= 0 \\ a - b - di &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à $a = b$ et $d = 0$. L'équation dans le plan euclidien $\Pi$ est donc de la forme $a\left(x^2 + y^2\right) + ey + fx$ ce qui est l'équation d'un cercle.

**Proposition 5** *Les coniques du complété projectif qui passent par les points cycliques sont les cercles de $\Pi$ (ou éventuellement la réunion d'une droite et de la droite à l'infini ).*